



PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM SANDWICH CƠ TÍNH THAY ĐỔI BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN LIÊN TỤC TRÊN C^1

Phạm Quốc Hòa, Đào Ngọc Diệp*

Trường Đại học Cửu Long

*Email: daongocdiep08@gmail.com

Ngày nhận bài: 20/07/2025; Ngày phản biện: 03/08/2025; Ngày duyệt bài: 17/09/2025

TÓM TẮT

Bài báo đề xuất phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng phần tử tứ giác bốn nút với bảy bậc tự do mỗi nút để phân tích dao động tự do của tấm sandwich có lõi chế tạo bằng kim loại, hai lớp trên và dưới của tấm là vật liệu hỗn hợp gốm và kim loại có cơ tính thay đổi theo chiều dày tấm. Trường ứng suất-biến dạng của tấm được mô tả chính xác, đặc biệt là đối với các tấm có chiều dày lớn bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Shi có đạo hàm liên tục cấp C^1 . Độ hội tụ và độ chính xác của phương pháp đề xuất trong nghiên cứu này được xác định bằng cách so sánh các kết quả thu được với các kết quả trong các tài liệu uy tín đã được công bố. Điểm mới của nghiên cứu này là lần đầu tiên sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên sự kết hợp hàm dạng Lagrang và hàm dạng Hermit để phân tích dao động riêng của tấm Sandwich.

Từ khóa: Tấm Sandwich, Vật liệu có cơ tính thay đổi, Phần tử 4 nút, biến dạng cắt bậc ba Shi

ABSTRACT

The paper proposes a finite element method using a four-node quadrilateral element with seven degrees of freedom per node to analyze the free vibration of a sandwich plate with a metallic core. The top and bottom layers of the plate are made of ceramic-metal composite materials whose mechanical properties vary through the thickness of the plate. The stress-strain field of the plate is accurately described, especially for thick plates, by employing Shi's third-order shear deformation theory with C^1 -continuous derivatives. The convergence and accuracy of the proposed method are verified by comparing the obtained results with those reported in reputable published literature. The novelty of this study lies in the first-time application of the finite element method based on a combination of Lagrange and Hermite shape functions to analyze the free vibration of sandwich plates.

Keywords: Sandwich Plate, Functionally Graded Material, Four-node Element, Shi's Third-order Shear Deformation

1. Mở đầu

Vật liệu có cơ tính thay đổi (Functionally graded material- viết tắt: FGM) là các vật liệu tiên tiến, có các tính chất cơ học thay đổi liên tục theo chiều dày của tấm, Chúng

đã được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực khoa học kỹ thuật và công nghiệp mũi nhọn như kỹ thuật hàng không vũ trụ, kỹ thuật dân dụng và nhà máy điện hạt nhân. Nghiên cứu ứng xử các kết cấu chế tạo từ vật liệu FGM được nhiều nhà khoa học trên thế giới quan

tâm. Một số nghiên cứu tiêu biểu có thể kể đến như Hosseini-Hashemi và cộng sự [[1]] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để phân tích dao động tự do của tấm FGM, Reddy [[2], [3]] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao để tính toán ứng xử tuyến tính và phi tuyến cho tấm FGM.

Kết cấu tấm sandwich bao gồm hai lớp ngoài mỏng thường được làm từ vật liệu FGM và lớp lõi nhẹ, dày làm từ kim loại. Vì vậy, kết cấu này có khả năng chịu được mài mòn, độ cứng chống uốn tốt, bên cạnh đó có trọng lượng nhẹ, khả năng cách âm, cách nhiệt hiệu quả do có lớp lõi là vật liệu kim loại mềm, nhẹ. Với những đặc tính ưu việt như vậy nên kết cấu sandwich hiện nay được ứng dụng rất nhiều trong các ngành công nghiệp hàng không, vũ trụ, tàu ngầm, hàng hải và công nghiệp quân sự. Với những ứng dụng quan trọng như trên nên việc nghiên cứu kết cấu này cũng rất được quan tâm. Zarga và cộng sự [[4]] sử dụng lý thuyết tiệm cận ba chiều để tính toán uốn tĩnh của tấm sandwich trong môi trường nhiệt độ. Zenkour [[5]] phát triển lý thuyết biến dạng cắt với bốn ẩn số để phân tích uốn tĩnh cho tấm sandwich. Natarajan và cộng sự [[6]] nghiên cứu uốn tĩnh và dao động tự do của tấm sandwich bằng cách sử dụng lý thuyết tiệm cận ba chiều.

Phương pháp phần tử hữu hạn đã trở thành một công cụ được sử dụng rộng rãi trong phân tích cơ học [[7]]. Đặc biệt, phần tử hình chữ nhật bốn nút cổ điển rất phổ biến nhờ vào sự đơn giản và dễ dàng triển khai trên máy tính. Tuy nhiên, việc chỉ dựa vào hàm Lagrange không đáp ứng yêu cầu liên tục cấp C^1 của trường chuyển vị. Hơn nữa, phương pháp này không thỏa mãn điều kiện không có ứng suất tại mặt trên và mặt dưới của tấm. Để khắc phục hạn chế này, một phần tử bốn nút với bảy bậc tự do mỗi

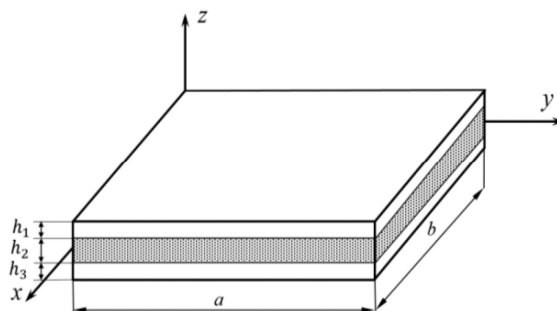
nút được đề xuất nghiên cứu trong bài báo này. Phần tử trong nghiên cứu này được xây dựng bằng cách kết hợp các hàm Lagrange và Hermite, giúp đảm bảo xác định được ứng suất tại mặt trên và mặt dưới của tấm, ngoài ra không cần sử dụng bất kỳ kỹ thuật xử lý khóa cắt khi tấm trở nên mỏng hơn.

Qua khảo sát các nghiên cứu đã công bố, các tác giả thấy rằng chưa có nghiên cứu nào sử dụng phần tử tứ giác bốn nút kết hợp hàm Lagrange và hàm Hermit để tính toán cho tấm sandwich. Mục tiêu chính của nghiên cứu này là thiết lập một phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên phần tử bốn nút mới để phân tích dao động tự do của tấm sandwich. Kết quả của nghiên cứu này được so sánh với kết quả của các nghiên cứu có uy tín đã được công bố để khẳng định tính chính xác của phần tử đề xuất.

2. Lý thuyết trọng tâm

2.1. Mô hình tấm sandwich có vật liệu cơ tính thay đổi

Trong bài viết này, các tác giả xem xét tấm sandwich có kích thước $a \times b$ và độ dày h như được mô tả như trong Hình 1. Tấm sandwich bao gồm ba lớp, bao gồm một lõi kim loại và hai lớp ngoài làm từ hai loại vật liệu FGM khác nhau, trong đó FGM-1 ở lớp dưới và FGM-2 ở lớp trên. Độ dày của lớp dưới, lớp lõi và lớp trên lần lượt là h_1 , h_2 , h_3 .



Hình 1. Mô hình tấm sandwich

Đặc tính của vật liệu tấm sandwich được xác định như sau [[8]]:

$$P^{(i)} = V_m^{(i)} (1 - V_c^{(i)}) + V_c^{(i)} P_c, (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

với P_c và P_m đại diện các đặc tính cơ học của vật liệu gốm và nhôm như mô đun đàn hồi, khối lượng riêng và hệ số poisson tương ứng; $V_c^{(i)}$ tỷ phần thể tích của vật liệu gốm được xác định bởi:

$$\begin{cases} V_c^{(1)} = 1 - \left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \right)^{k_1} & z \in [z_1; z_2] \\ V_c^{(2)} = 0 & z \in [z_2; z_3] \\ V_c^{(3)} = 1 - \left(\frac{z - z_4}{z_3 - z_4} \right)^{k_2} & z \in [z_3; z_4] \end{cases} \quad (2)$$

trong đó, k_1, k_2 là các số mũ hàm mũ của lớp dưới (FGM-1) và lớp trên (FGM-2), tương ứng. Cấu trúc và thành phần các lớp của tấm sandwich được trình bày trong Bảng 1. Các tính chất vật liệu của từng thành phần được

liệt kê trong Bảng 2.

Bảng 1. Kết cấu tấm sandwich.

Lớp dưới (FGM-1)	Lớp lõi	Lớp trên (FGM-2)
Al/Al ₂ O ₃	Al ₂ O ₃	Al ₂ O ₃ /Al

Bảng 2. Đặc tính vật liệu chế tạo tấm sandwich

Thành phần vật liệu	Mô đun đàn hồi (GPa)	Khối lượng riêng (kg/m ³)	Hệ số poisson
Al ₂ O ₃	380	3800	0.3
Al	70	2707	0.3

2.2. Lý thuyết bậc cao của Shi

Trường chuyển vị của tấm theo lý thuyết Shi [[9]]:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + \frac{5}{4} \left(z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) \varphi_x(x, y) + \left(\frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2} z^3 \right) w_{0,x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + \frac{5}{4} \left(z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) \varphi_y(x, y) + \left(\frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2} z^3 \right) w_{0,y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

ở đây u_0, v_0, w_0, φ_x và φ_y là các tham số chuyển vị của tấm. Đặc biệt, u_0, v_0, w_0 là chuyển vị mặt giữa tấm; φ_x, φ_y là các góc quay trong mặt phẳng xz, yz , tương ứng.

Trường biến dạng suy ra từ trường chuyển vị như sau:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\kappa}_1 + z^3\boldsymbol{\kappa}_2 \quad (4)$$

ở đây

Biến dạng màng $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ là:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Biến dạng uốn $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$ là:

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 5\varphi_{x,x} + w_{,xx} \\ 5\varphi_{y,y} + w_{,yy} \\ 5\varphi_{x,y} + 2w_{,xy} + 5\varphi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_2 = \frac{-5}{3h^2} \begin{Bmatrix} \varphi_{x,x} + w_{,xx} \\ \varphi_{y,y} + w_{,yy} \\ \varphi_{x,y} + 2w_{,xy} + \varphi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Biến dạng cắt $\boldsymbol{\gamma}$ là:

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + z^2\boldsymbol{\gamma}_1 \quad (8)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_0 &= \frac{5}{4} \begin{Bmatrix} w_{,y} + \varphi_y \\ w_{,x} + \varphi_x \end{Bmatrix}; \\ \boldsymbol{\gamma}_1 &= \frac{-5}{h^2} \begin{Bmatrix} w_{,y} + \varphi_y \\ w_{,x} + \varphi_x \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Quan hệ giữa ứng suất biến dạng theo định luật Hooke như sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{M} & \mathbf{P} \end{bmatrix}^T = \mathbf{D}_m \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m & \boldsymbol{\kappa}_1 & \boldsymbol{\kappa}_2 \end{bmatrix}^T; \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \end{bmatrix}^T = \mathbf{D}_s \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_0 & \boldsymbol{\gamma}_1 \end{bmatrix}^T$$

ở đây

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbb{B}^b \\ \mathbb{B} & \mathbb{F} & \mathbb{F}^b \\ \mathbb{B}^b & \mathbb{F}^b & \mathbb{H} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbb{A}^s & \mathbb{B}^s \\ \mathbb{B}^s & \mathbb{F}^s \end{bmatrix} \quad (11)$$

trong đó

$$(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{B}^b, \mathbb{F}, \mathbb{F}^b, \mathbb{H}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1 - \nu(z)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (12)$$

và

$$(\mathbb{A}^s, \mathbb{B}^s, \mathbb{F}^s) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1 + \nu(z))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (1, z^2, z^4) dz \quad (13)$$

Công thức (10) có thể trình bày trong dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbb{B}^b & 0 & 0 \\ \mathbb{B} & \mathbb{F} & \mathbb{F}^b & 0 & 0 \\ \mathbb{B}^b & \mathbb{F}^b & \mathbb{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}^s & \mathbb{B}^s \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{B}^s & \mathbb{F}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \\ \boldsymbol{\gamma}_0 \\ \boldsymbol{\gamma}_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.3. Phương trình vi phân của tấm sandwich

Phương trình vi phân của tấm sandwich [[10]]:

$$\int_0^T (\delta U + \delta U^f + \delta W - \delta T) dt = 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \left(z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) & 0 & \left(\frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2} z^3 \right) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \left(z - \frac{4}{3h^2} z^3 \right) & 0 & \left(\frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2} z^3 \right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

với $\rho(z)$ là khối lượng riêng.

Phương trình vi phân của tấm sandwich được biểu diễn qua phương trình dạng yếu như sau [[10]]:

$$\int_S ((\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \mathbf{D}_m \delta \boldsymbol{\varepsilon} + (\delta \boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{D}_s \delta \boldsymbol{\gamma}) dS - \int_S \delta \mathbf{q}^T \mathcal{M} \ddot{\mathbf{q}} dS = 0. \quad (21)$$

2.4. Phương pháp phần tử hữu hạn

Vec tơ chuyển vị nút của phần tử tứ giác

$$\left\{ \sum_{i=1}^4 N_i u_{0i} \dots \sum_{i=1}^4 N_i v_{0i} \dots \right\}$$

Để thỏa mãn điều kiện không có ứng suất tại mặt trên và mặt dưới tấm, đạo hàm w trong các hướng x và y được giả thiết hai

$$w = H_1 w_1 + H_2 w_{1,x} + H_3 w_{1,y} + \dots + H_{10} w_4 + H_{11} w_{4,x} + H_{12} w_{4,y} \quad (25)$$

$$\theta_x = w_{,x} + \varphi_x = \frac{\partial}{\partial x} (H_1 w_1 + H_2 w_{1,x} + H_3 w_{1,y} + \dots + H_{10} w_4 + H_{11} w_{4,x} + H_{12} w_{4,y}) + \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{xi} \quad (26)$$

Năng lượng biến dạng biểu diễn như sau:

$$\delta U = \int_S \left((\delta \boldsymbol{\varepsilon}_m)^T \mathbf{N} + (\delta \boldsymbol{\kappa}_1)^T \mathbf{M} + (\delta \boldsymbol{\kappa}_2)^T \mathbf{P} + (\delta \boldsymbol{\gamma}_0)^T \mathbf{Q} + (\delta \boldsymbol{\gamma}_1)^T \mathbf{R} \right) dS \quad (16)$$

Động năng được biểu diễn như sau:

$$\delta T = \int_S \rho(z) (\dot{u} \delta u + \dot{v} \delta v + \dot{w} \delta w) dS = \int_S \delta \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} \dot{\mathbf{q}} dS \quad (17)$$

ở đây

$$\mathbf{q} = \{u_0 \quad v_0 \quad w \quad \varphi_x \quad \varphi_y \quad w_{,x} \quad w_{,y}\} \quad (18)$$

và

$$\mathcal{M} = \rho(z) \mathbf{L}_m^T \mathbf{L}_m \quad (19)$$

được biểu diễn như sau (xem Hình 2):

$$\mathbf{q}_e = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_3^T \quad \mathbf{q}_4^T]^T \quad (22)$$

$\mathbf{q}_i$ ($i = 1 \div 4$) được mô tả như sau:

$$\mathbf{q}_i = \{u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_i \quad \varphi_{xi} \quad \varphi_{yi} \quad \theta_{xi} = w_{i,x} \quad \theta_{yi} = w_{i,y}\} \quad (23)$$

ở đây

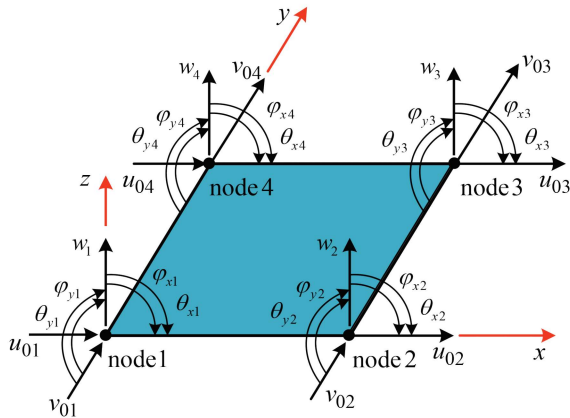
u_0, v_0, φ_x và φ_y nội suy dựa trên hàm

Lagrang (xem Phụ lục):

$$\{u_0 \quad v_0 \quad \varphi_x \quad \varphi_y\} = \left\{ \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{xi} \dots \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{yi} \dots \right\}^T; \quad (24)$$

bậc tự do θ_x và θ_y và được xấp xỉ dựa trên Hermit như sau (xem Phụ lục):

$$\begin{aligned} \theta_y = w_{,y} + \varphi_y = \frac{\partial}{\partial y} (H_1 w_1 + H_2 w_{1,x} + H_3 w_{1,y} + \dots + H_{10} w_4 + H_{11} w_{4,x} \\ + H_{12} w_{4,y}) + \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{yi} \end{aligned} \quad (27)$$



Hình 2. Mô hình phần tử tứ giác 4 nút với 7 bậc tự do mỗi nút.

Thay thế các công thức (25), (26), (27) vào các công thức (5), (6), (7), (8) các vectơ trường biến dạng có thể được biểu diễn như sau:

$$\varepsilon = [B_1 \quad B_2 \quad B_3] q_e; \quad (28)$$

$$N = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{(3i-2)} & 0 & 0 & H_{(3i-1)} & 0 & H_{3i} \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \zeta} H_{(3i-2)} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \zeta} H_{(3i-1)} & \frac{\partial}{\partial \zeta} H_{3i} & \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \chi} H_{(3i-2)} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \chi} H_{(3i-1)} & \frac{\partial}{\partial \chi} H_{3i} & \end{bmatrix} \quad (33)$$

Phương trình vi phân chủ đạo của tấm biểu diễn trong dạng ma trận như sau:

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \Leftrightarrow |K - \omega^2 M| = 0 \quad (34)$$

ở đây ω là tần số kết cấu tấm; $K = \sum_{nel} K_e$, $M = \sum_{nel} M_e$ là các ma trận độ cứng và ma trận khối lượng toàn cục.

3. Kết quả số

Trong phần này các tác giả tiến hành tính toán tần số dao động riêng của tấm sandwich và so sánh với các nghiên cứu đã công bố để

$$\gamma = [B_4 \quad B_5] q_e \quad (29)$$

Thay thế các công thức (28), (29) vào công thức (23), phương trình chủ đạo của tấm được viết lại như sau:

$$M_e \ddot{q}_e + K_e q_e = 0 \quad (30)$$

trong đó

Ma trận độ cứng K_e là:

$$K_e = \int_S \left(\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} A & B & B^b & 0 \\ B & F & F^b & 0 \\ B^b & F^b & H & 0 \\ 0 & 0 & A^s & B^s \\ 0 & 0 & B^s & F^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{Bmatrix} \right) dS \quad (31)$$

Ma trận khối lượng phần tử M_e :

$$M_e = \int_S N^T \mathcal{M} N dS \quad (32)$$

ở đây N là ma trận hàm dạng của phần tử:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{(3i-1)} & H_{3i} \\ N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \zeta} H_{(3i-1)} & \frac{\partial}{\partial \zeta} H_{3i} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial \chi} H_{(3i-1)} & \frac{\partial}{\partial \chi} H_{3i} \end{bmatrix}$$

khẳng định tính chính xác và hiệu quả của phương pháp tính toán mà bài báo này đề xuất. Phương pháp phần tử hữu hạn tác giả sử dụng các kích thước lưới khác nhau. Bảng 3 trình bày tần số đầu tiên của tấm sandwich vật liệu cơ tính thay đổi Al/Al₂O₃

$$\omega^* = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$$

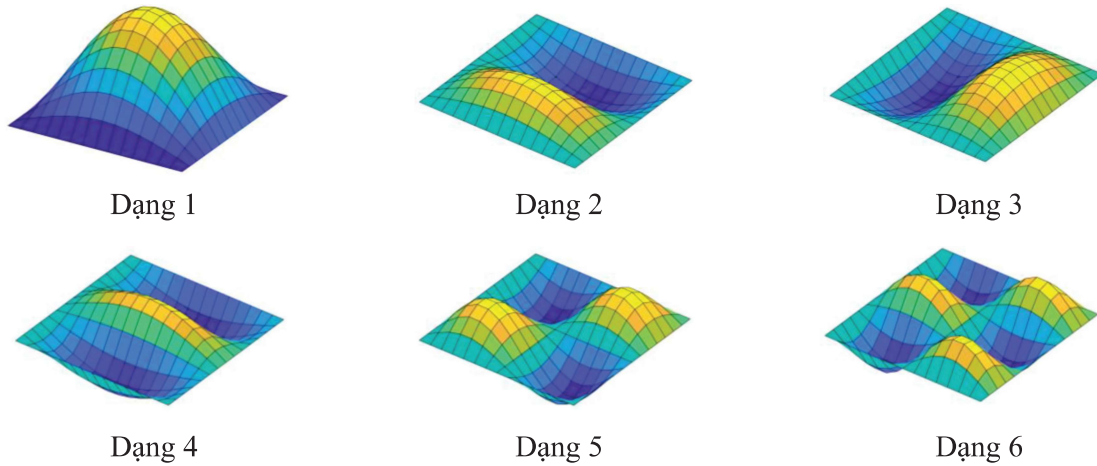
với ($\rho_0 = 1 \text{ kg/m}^3$, $E_0 = 1 \text{ GPa}$). Kết quả của phần tử hiện tại với kích thước lưới 16 x 16 cho kết quả rất gần với kết quả đã được công

bổ bởi Li và cộng sự [[11]] cũng như kết quả được công bố bởi Bessaim và cộng sự [[12]]. Với kết quả so sánh trên các tác giả thấy rằng chọn kích thước lưới 16 x 16 là phù hợp để tính toán cho các kết cấu tấm sandwich. Ngoài ra, qua bảng kết quả này ta cũng thấy rằng khi k_1, k_2 tăng dần thì tần số của tấm tăng lên, điều này có thể giải thích là mặt trên và mặt dưới của tấm có tỉ lệ gồm tăng lên và làm cho tấm trở nên cứng hơn, nên tần số cao hơn. Bên

cạnh đó ta cũng thấy rằng kiểu lớp sandwich 1-1-1 luôn cho tần số dao động lớn nhất trong khi hai kiểu còn lại cho tần số dao động nhỏ hơn. Căn cứ vào các kết quả này người kỹ sư có thể chọn kết cấu sandwich sao cho phù hợp với nhu cầu thực tế trong kỹ thuật. Hình 3 hiển thị các dạng dao động của tấm sandwich một cách trực quan, các hình này giúp người đọc hiểu rõ hơn về dạng dao động của tấm trong thực tế kỹ thuật.

Bảng 3. Các tần số đầu tiên ω^* của tấm sandwich với chiều dày $h = a/10$

$k_1 = k_2$	Kích thước lưới	Kiểu lớp Sandwich								
		1-1-1			2-2-1			1-2-1		
		Phương pháp đề xuất	[[11]]	[[12]]	Phương pháp đề xuất	[[11]]	[[12]]	Phương pháp đề xuất	[[11]]	[[12]]
0	(10x10)	0.93022	0.92897	0.92897	0.93022	0.92897	0.92897	0.93022	0.92897	0.92897
	(12x12)	0.92946			0.92946			0.92946		
	(14x14)	0.92901			0.92901			0.92901		
	(16x16)	0.92872			0.92872			0.92872		
	(18x18)	0.92872			0.92872			0.92872		
0.5	(10x10)	1.48947	1.48459	1.48853	1.43901	1.43419	1.4404	1.41791	1.41662	1.41788
	(12x12)	1.48859			1.43818			1.41714		
	(14x14)	1.48806			1.43769			1.41668		
	(16x16)	1.48772			1.43736			1.41638		
	(18x18)	1.48772			1.43736			1.41638		
1	(10x10)	1.64301	1.63053	1.64199	1.58226	1.57037	1.5843	1.56247	1.55788	1.56301
	(12x12)	1.64202			1.58136			1.56165		
	(14x14)	1.64143			1.58081			1.56116		
	(16x16)	1.64105			1.58046			1.56085		
	(18x18)	1.64105			1.58046			1.56085		
5	(10x10)	1.82199	1.78956	1.82032	1.75968	1.72726	1.75972	1.74793	1.7267	1.75143
	(12x12)	1.82071			1.75852			1.74689		
	(14x14)	1.81993			1.75783			1.74627		
	(16x16)	1.81943			1.75738			1.74587		
	(18x18)	1.81943			1.75738			1.74587		
10	(10x10)	1.84213	1.80813	1.83973	1.78527	1.74779	1.78163	1.77359	1.74811	1.77878
	(12x12)	1.84078			1.78405			1.77248		
	(14x14)	1.83997			1.78332			1.77182		
	(16x16)	1.83944			1.78284			1.77139		
	(18x18)	1.83944			1.78284			1.77139		



Hình 3. Các dạng dao động của tấm Sandwich

4. Kết luận

Nghiên cứu này giới thiệu một phần tử tứ giác bốn nút mới, với bảy bậc tự do tại mỗi nút, nhằm mô phỏng chính xác dao động tự do của các tấm sandwich có cơ tính thay đổi. Nhờ vào việc áp dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba của Shi, mô hình đã thể hiện khả năng phản ánh chính xác ứng xử cơ học của kết cấu, đặc biệt trong trường hợp chiều dày tấm lớn. Các kết quả thu được cho thấy phương pháp đề xuất không chỉ đáng tin cậy mà còn linh hoạt trong việc xử lý các dạng kết cấu phức tạp sử dụng vật liệu tiên

tiến. Đây là một bước tiến quan trọng, mở ra tiềm năng ứng dụng rộng rãi trong thiết kế và phân tích kết cấu trong các ngành công nghiệp yêu cầu cao như hàng không vũ trụ, tàu thủy, và quốc phòng.

PHỤ LỤC

Hàm dạng Lagrange:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{1}{4}(1-\chi)(1-\xi); N_2 = \frac{1}{4}(1+\chi)(1-\xi) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+\chi)(1+\xi); N_4 = \frac{1}{4}(1-\chi)(1+\xi) \end{cases}$$

Hàm dạng Hermit:

$$\begin{cases} H_1 = \frac{1}{8}(1-\chi)(1-\xi)(2-\chi-\xi-\chi^2-\xi^2); H_2 = \frac{1}{8}(1-\chi)(1-\xi)(1-\chi^2) \\ H_3 = \frac{1}{8}(1-\chi)(1-\xi)(1-\xi^2); H_4 = \frac{1}{8}(1+\chi)(1-\xi)(2+\chi-\xi-\chi^2-\xi^2) \\ H_5 = -\frac{1}{8}(1+\chi)(1-\xi)(1-\chi^2); H_6 = \frac{1}{8}(1+\chi)(1-\xi)(1-\chi^2) \\ H_7 = \frac{1}{8}(1+\chi)(1+\xi)(2+\chi+\xi-\chi^2-\xi^2); H_8 = -\frac{1}{8}(1+\chi)(1+\xi)(1-\chi^2) \\ H_9 = -\frac{1}{8}(1+\chi)(1+\xi)(1-\xi^2); H_{10} = \frac{1}{8}(1-\chi)(1+\xi)(2-\chi+\xi-\chi^2-\xi^2) \\ H_{11} = \frac{1}{8}(1-\chi)(1+\xi)(1-\chi^2); H_{12} = -\frac{1}{8}(1-\chi)(1+\xi)(1-\xi^2) \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_1 = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),xx} & 5N_{i,x} & 0 & H_{(3i-1),xx} & H_{(3i),xx} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),yy} & 0 & 5N_{i,y} & H_{(3i-1),yy} & H_{(3i),yy} \\ 0 & 0 & 2H_{(3i-2),xy} & 5N_{i,y} & 5N_{i,x} & 2H_{(3i-1),xy} & 2H_{(3i),xy} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_3 = \frac{-5}{3h^2} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),xx} & N_{i,x} & 0 & H_{(3i-1),xx} & H_{(3i),xx} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),yy} & 0 & N_{i,y} & H_{(3i-2),yy} & H_{(3i),yy} \\ 0 & 0 & 2H_{(3i-2),xy} & N_{i,y} & N_{i,x} & 2H_{(3i-1),xy} & 2H_{(3i),xy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_4 = \frac{5}{4} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),x} & N_i & 0 & H_{(3i-1),x} & H_{(3i),x} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),y} & 0 & N_i & H_{(3i-1),y} & H_{(3i),y} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_5 = \frac{-5}{h^2} \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{(3i-2),x} & N_i & 0 & H_{(3i-1),x} & H_{(3i),x} \\ 0 & 0 & H_{(3i-2),y} & 0 & N_i & H_{(3i-1),y} & H_{(3i),y} \end{bmatrix}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Hosseini-Hashemi S, Taher HRD, Akhavan H, Omidi M. Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 2010;34(5):1276-1291.
- [2] Reddy JN. Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000;47:663-684.
- [3] Reddy JN. A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates. *International Journal of Aerospace and Lightweight Structures*, 2011;1:1-21.
- [4] Zarga D, Tounsi A, Bousahla AA, Bourada F, Mahmoud SR. Thermomechanical bending study for functionally graded sandwich plates using a simple quasi-3D shear deformation theory. *Steel and Composite Structures*, 2019;32(3):389-410.
- [5] Zenkour AM. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using a simple four unknown shear and normal deformations theory. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 2013;15:629-656.
- [6] Natarajan S, Manickam G. Bending and vibration of functionally graded material sandwich plates using an accurate theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012;57:32-42.
- [7] Hein A, Vekinis G, Kilikoglou V. Modeling of biaxial flexure tests of transport amphorae with the finite element method: Fracture strength, deformation and stress distribution. *Results in Engineering* 2022;15:100508.
- [8] Alibeigloo A, Alizadeh M. Static and free vibration analyses of functionally graded sandwich plates using state space differential quadrature method. *European Journal of Mechanics-A/Solids* 2015;54:252-66.
- [9] Shi G (2007) A new simple third-order shear deformation theory of plates. *International Journal of Solids and Structures* 44:4399-4417.
- [10] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*, CRC press 2003.
- [11] Li Q, Iu VP, Kou KP. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J Sound Vib* 2008;311:498e515.
- [12] Bessaim A, Houari MSA, Tounsi A, Mahmoud SR, El Abbas AB. A new higher order shear and normal deformation theory for the static and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded isotropic face sheets. *J Sand Struct Mat* 2013;15(6):671e703.